21/3/19

Ερώτημα: Στο μετρικό χώρο $(A, \rho_A)$ ποια είναι τα ανοικτά σύνολα?

Πρόταση: Έστω $(X, \rho)$ μ.χ. $A \subseteq X$. Τότε αν i) $G \subseteq A$, το $G$ είναι ανοικτό στον $(A, \rho_A)$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο $V$ του $X$ ώστε: $G = V \cap A$

ii) Αν $B \subseteq X$ $A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(A \cap B)$

[Αν $B \subseteq A$, τότε $\mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B)$]

Απόδειξη: i) ($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο $V$ του $X$ ώστε $G = V \cap A$

Έστω $x \in G$ (Ισχυρισμός: $\varepsilon > 0$, $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) \subseteq G$). Τότε $x \in V$ και $x \in A$. Εφόσον το $V$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$

Συνεπώς, $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \subseteq V \cap A$

Εφόσον $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A = B_{\rho_A}(x, \varepsilon)$ και $V \cap A = G$, προκύπτει ότι: $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) \subseteq G$. Έτσι αποδείξαμε ότι $G$ είναι ανοιχτό στον $(A, \rho_A)$

($\Rightarrow$) Έστω ότι το $G$ είναι ανοιχτό στον $(A, \rho_A)$

Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) \subseteq G$

Θέτουμε $V = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)$. Έχουμε ότι το $V$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $X$ (ως ένωση ανοιχτών)

$$V \cap A = \left( \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x) \right) \cap A = \bigcup_{x \in G} \left( B_\rho(x, \varepsilon_x) \cap A \right) = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) \subseteq G$$

Επίσης $\forall x \in G$, $x \in B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) \subseteq \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) = V \cap A$

άρα $G \subseteq V \cap A$ έτσι $G = V \cap A$

ii) Το $\mathrm{int}_X(B)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $X$, άρα το $A \cap \mathrm{int}_X(B)$ είναι ανοιχτό σύνολο στον $(A, \rho_A)$

Επίσης, $A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq A \cap B$

Άρα $A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(A \cap B)$

Παραδείγματα: 1) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $\rho$ και $A=[0,3]$. Το σύνολο $(1,3]$ είναι ανοιχτό στο $A$? Ναι, διότι το $(1,4)$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ και $(1,4)\cap[0,3]=(1,3]$

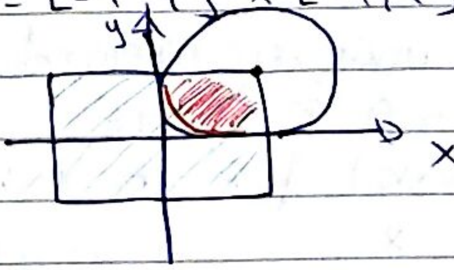
Ομοίως το $[0,5/2)$ είναι ανοιχτό στο $[0,3]$ διότι $[0,5/2) = \underbrace{(-7,5/2)}_{\text{ανοιχτό υποσύνολο του } \mathbb{R}} \cap [0,3]$

2) Θεωρούμε $A=\mathbb{Q}$. Το σύνολο $\{x\in\mathbb{Q} : x>3\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $A=\mathbb{Q}$ διότι:

$\{x\in\mathbb{Q} : x>3\} = (3,+\infty)\cap\mathbb{Q}$

ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

3) Στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική. Θέτουμε $A=[-1,1]\times[-1,1]$




$E=\{(x,y)\in A : (x-1)^2+(y-1)^2<1\}$ είναι ανοιχτό στο $A$.

$E = B_\rho((1,1),1)\cap A$

ανοιχτό στον $\mathbb{R}^2$

Παρατήρηση: Στον ισχυρισμό $A\cap \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(B)\subseteq \mathrm{int}_A(A\cap B)$ δεν ισχύει πάντα ισότητα

(π.χ.) $A=[0,1]$ στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική
$B=[0,1/2)$

$\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(B)=(0,1/2)$ ενώ $\mathrm{int}_A(B)=B=[0,1/2)$ διότι το $B$ είναι ανοιχτό στο $A$

**Πρόταση:** Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. και $A \subseteq X$
i) Αν $F \subseteq A$ τότε το $F$ είναι κλειστό στον $(A,\rho_A)$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο $K$ του $X$ ώστε $F = A \cap K$
ii) Για κάθε $B \subseteq A$ $cl_A(B) = A \cap cl_X(B)$
(όπου: $cl_X(B)$ η κλειστή θήκη του $B$ στον $(X,\rho)$ και $cl_A(B)$ -//- -//- $(A,\rho_A)$)

**Απόδειξη:** i) ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το $F$ είναι κλειστό στον $(A,\rho_A)$. Τότε το $A \setminus F$ είναι ανοικτό στον $(A,\rho_A)$ άρα από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο $G$ του $X$ ώστε $A \setminus F = A \cap G$. Τότε $F = A \cap (X \setminus G)$
$[\,F = A \setminus (A \setminus F) = A \setminus (A \cap G) = A \setminus G = A \cap (X \setminus G)\,]$
Έτσι για $K = X \setminus G$ έχουμε το συμπέρασμα

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο $K$ του $X$ ώστε $F = A \cap K$. Τότε:
$A \setminus F = A \setminus (A \cap K) = A \setminus K = A \cap (X \setminus K)$ με το $X \setminus K$ να είναι ανοικτό υποσύνολο του $X$.
Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το $A \cap (X \setminus K)$ είναι ανοικτό στο $A$ δηλ. $A \setminus F$ ανοικτό στο $A$ άρα $F$ κλειστό στο $A$.

ii) Έστω $B \subseteq A$ το $cl_X(B)$ είναι κλειστό στο $X$ άρα το $A \cap cl_X(B)$ είναι κλειστό στο $A$, ενώ $B \subseteq A \cap cl_X(B)$

Άρα $\boxed{cl_A(B) \subseteq A \cap cl_X(B)}$

Αντίστροφα, αν $F$ κλειστό υποσύνολο του $A$ με $B \subseteq F$ (και θα δ.ο. $A \cap cl_X(B) \subseteq F$). Τότε υπάρχει κλειστό υποσύνολο $K$ του $X$ ώστε $F = A \cap K$ άρα:

$cl_X(B) \subseteq cl_X(F) = cl_X(A \cap k) \subseteq cl_X(k) = k$ (k: κλειστό)

Επομένως, $A \cap cl_X(B) \subseteq \bigcap \{F : F$ κλειστό υποσύνολο του $A$, $B \subseteq F\}$

Επομένως, $cl_A(B) = A \cap cl_X(B)$

Παράδειγμα: Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε $A = (0,2) \cup \{3\} \cup [4,6]$. Το $(0,2)$ είναι ανοιχτό στο $A$ $\left[ (0,2) = \underbrace{(0,2)}_{\text{ανοιχτό στο } \mathbb{R}} \cap A \right]$

Το $(0,2)$ είναι κλειστό στο $A$ $\left( (0,2) = [0,2] \cap A \text{ με } [0,2] \text{ κλειστό υποσ. του } \mathbb{R} \right)$

Το $\{3\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο $A$.

$\{3\} = \underbrace{\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)}_{\text{ανοιχτό στο } \mathbb{R}} \cap A$ $\qquad$ $\{3\} = \underbrace{\{3\}}_{\text{κλειστό στο } \mathbb{R}} \cap A$

Το $[4,6]$ είναι ανοιχτό στο $A$ αφού $[4,6] = A \cap \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ με $(7/2, +\infty)$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}$. Επίσης το $[4,6]$ είναι κλειστό στο $A$.

---

$(X, \rho)$ μ.χ. $A \neq \emptyset$, $x \in X$, $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$

Πρόταση: Έστω $(X, \rho)$ μ.χ. $A \subseteq X$, $x \in X$ τότε:
$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0$

Αποδ: ($\Rightarrow$) Έστω $x \in \bar{A}$. Προφανώς το $0$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\rho(x,y) : y \in A\}$. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε εφόσον $x \in \bar{A}$: $A \cap B_\rho(x, \varepsilon) \neq \emptyset$

Άρα υπάρχει $y \in A \cap (B_\rho(x,\varepsilon))$ δηλ. $y \in A$ και $\rho(x,y) < \varepsilon$

Επομένως, $\inf\{\rho(x,y) : y \in A\} = 0$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, αν $\rho(x,A)=0$ τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $y\in A$ με $\rho(x,y)<\varepsilon$, τότε: $y\in A\cap B_\rho(x,\varepsilon)$ άρα: $A\cap B_\rho(x,\varepsilon)\neq\emptyset$ επομένως $x\in\bar{A}$

Πόρισμα: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. $A\subseteq X$. Τότε το $A$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε $x\in X\setminus A$ ισχύει $\rho(x,A)>0$

Αποδ: Αν $A$: κλειστό τότε $A=\bar{A}$. Τότε για κάθε $x\in X\setminus A$ έχουμε $x\notin A \Rightarrow x\notin\bar{A}$, άρα από την προηγούμενη πρόταση $\rho(x,A)>0$

Αντίστροφα, αν για κάθε $x\in X\setminus A$ ισχύει: $\rho(x,A)>0$

Άρα $X\setminus A\subseteq X\setminus\bar{A} \Rightarrow \bar{A}\subseteq A \Rightarrow \bar{A}=A \Rightarrow$ $A$: κλειστό

Πρόταση: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. $A\subseteq X$ τότε:

i) $\overline{X\setminus A} = X\setminus A^\circ$

ii) $X\setminus\bar{A} = (X\setminus A)^\circ$

Έστω $x\in X$

Αποδ: ii) $x\in X\setminus\bar{A} \Leftrightarrow x\notin\bar{A} \Leftrightarrow \exists\,\varepsilon>0 : A\cap B_\rho(x,\varepsilon)=\emptyset$ $\Leftrightarrow \exists\,\varepsilon>0\ B_\rho(x,\varepsilon)\subseteq X\setminus A \Leftrightarrow x\in(X\setminus A)^\circ$

i) 1η απόδειξη: Εφαρμόζουμε το (ii) για το σύνολο $X\setminus A$

2η απόδειξη (άμεση) $x\in X\setminus A^\circ \Leftrightarrow x\notin A^\circ \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$: $B_\rho(x,\varepsilon)\nsubseteq A \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0\ B_\rho(x,\varepsilon)\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$ $\Leftrightarrow x\in\overline{X\setminus A}$

Άσκηση: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. και $A \neq \emptyset$, τότε:
$$\text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A)$$

$$\boxed{\text{diam}(K) = \sup\{(x,y) : x,y \in K\}}$$

Αποδ: $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \{\rho(x,y) : x,y \in A\} \subseteq \{\rho(x,y) : x,y \in \bar{A}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\} \leq \sup\{\rho(x,y) : x,y \in \bar{A}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\bar{A})$

Αρκεί νδο $\text{diam}(\bar{A}) \leq \text{diam}(A)$ (1)
Αν $\text{diam}(A) = +\infty$ η (1) ισχύει.
Υποθέτουμε ότι $\text{diam}(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ ν.δ.ο
$\text{diam}(\bar{A}) \leq \text{diam}(A) + \varepsilon$. Έστω $x,y \in \bar{A}$
$A \cap B_\rho(x, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$

$A \cap B_\rho(y, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $x_1 \in A$ με $\rho(x,x_1) < \varepsilon/2$ και υπάρχει $y_1 \in A$ με $\rho(y,y_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_1) + \rho(x_1,y_1) + \rho(y_1,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x_1,y_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \text{diam}(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \text{diam}(A) + \varepsilon$$

Άρα $\sup\{(x,y) : x,y \in \bar{A}\} \leq \text{diam}(A) + \varepsilon \Rightarrow$
$\text{diam}(\bar{A}) \leq \text{diam}(A) + \varepsilon$. Αφού αυτό αποδείξαμε για κάθε $\varepsilon > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\text{diam}(\bar{A}) \leq \text{diam}(A)$

Επομένως $\boxed{\text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A)}$

Άσκηση: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ.
1) Αν $x \in X$ και $A \subseteq X$ μη κενό $\rho(x,A) = \rho(x,\bar{A})$
2) Αν $A,B \subseteq X$ μη κενά τότε $\rho(\bar{A},\bar{B}) = \rho(A,B)$

Ορισμός: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το $x$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του $A$ αν (σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $x$ περιέχονται στοιχεία του $A$ διαφορετικά του $x$) $\forall \varepsilon > 0 \quad B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing$

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $A$ συμβολίζεται με $A'$ και ονομάζεται παράγωγο σύνολο του $A$

Παρατηρήσεις: 1) $x \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing$
$\Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$

2) $\bar{A} = A \cup A'$

Απ: $A \subseteq \bar{A}$. Επίσης $x \in A' \Rightarrow x \in \bar{A}$ άρα $A' \subseteq \bar{A}$
Άρα $A \cup A' \subseteq \bar{A}$

Αντίστροφα, έστω $x \in \bar{A}$ και θ.δ.ο. $x \in A \cup A'$
$\Rightarrow$ Αν $x \in A$ ✓
$\Rightarrow$ Αν $x \notin A$ τότε $A \setminus \{x\} = A$ άρα $x \in \bar{A} = \overline{A \setminus \{x\}}$
$\Rightarrow x \in A'$

Επομένως $\boxed{\bar{A} \subseteq A \cup A'}$

**Πρόταση:** Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. $A \subseteq X$, $x \in X$. Τ.Α.Ε.Ι.

(i) Το $x$ είναι σ.σ. του $A$ $(x \in A')$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ : $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο

**Αποδ:** ii) $\Rightarrow$ i) Έστω $x \in A'$. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A$ να είναι πεπερασμένο

Έστω $B_\rho(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, \dots, x_n\}$

Τότε: $x_i \neq x$ $i = 1, \dots, n$ άρα: $\rho(x_i, x) > 0$

$i = 1, \dots, n$. Θέτουμε: $\delta = \min\{\rho(x_1,x), \rho(x_2,x), \dots, \rho(x_n,x)\}$

τότε: $B_\rho(x,\delta) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ άτοπο διότι $x \in A'$

Επομένως κάθε $\varepsilon > 0$ $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο.